第 24 講　空間での垂線の足

24　空間内の 4 点を A(1, 2, 1), B(3, 1, 1), C(1, 3, 2), D(6, 6, −2) とし，3 点 A, B, C を通る平面を α，点 D から平面 α に下ろした垂線の足を H とする．次の各問いに答えよ．

(1)　四面体 DABC の体積を求めよ．

(2)　平面 α 上にあり，中心が A で半径が 1 の円周上を点 Q が動くものとする．線分 DQ の長さが最大となるとき，AQ：QH を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　空間での垂線の足

24 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ \sqrt{5},\ 1)$，C$(0,\ 0,\ \sqrt{6})$ として，3 点 O，A，B を通る平面を α とする．α 上の点 O を中心とし半径 2 の円周上の点を P として，点 C から α へ下ろした垂線の足を H とするとき，PH の長さの最小値を求めよ．

【選択肢】

㋐　1　　㋑　2　　㋒　3

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　空間での垂線の足

24　空間内の 4 点を A(1, 2, 1), B(3, 1, 1), C(1, 3, 2), D(6, 6, −2) とし，3 点 A, B, C を通る平面を α，点 D から平面 α に下ろした垂線の足を H とする．次の各問いに答えよ．

(1)　四面体 DABC の体積を求めよ．

(2)　平面 α 上にあり，中心が A で半径が 1 の円周上を点 Q が動くものとする．線分 DQ の長さが最大となるとき，AQ：QH を求めよ．

【答】　(1) $\dfrac{19}{6}$　(2) AQ：QH＝3：$(3+\sqrt{89})$

【解答】

(1)　H は α 上の点より実数 α, β を用いて $\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ と表せる．DH⊥AB より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\alpha|\overrightarrow{AB}|^2+\beta\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

となる．

またDH⊥AC より同様に

$$\alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0\quad\cdots\cdots②$$

を得る．

ここで $\overrightarrow{AB}=(2,\ -1,\ 0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{AD}=(5,\ 4,\ -3)$ より $|\overrightarrow{AB}|^2=5$, $|\overrightarrow{AC}|^2=2$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=6$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=1$ となるので，①と②はそれぞれ

$$5\alpha-\beta-6=0,\quad -\alpha+2\beta-1=0$$

よって

$$\alpha=\frac{13}{9},\quad \beta=\frac{11}{9}$$

このとき $\overrightarrow{DH}=\left(-\dfrac{19}{9},\ -\dfrac{38}{9},\ \dfrac{38}{9}\right)$ より $|\overrightarrow{DH}|=\dfrac{19}{3}$

△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{3}{2}$ となるので，求める体積は

$$\frac{3}{2}\times\frac{19}{3}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{19}{6}}$$

(2)　点 H に対して

$$|\overrightarrow{AH}|^2=|\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}|^2=\alpha^2|\overrightarrow{AB}|^2+2\alpha\beta\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta^2|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{89}{9}>1$$

より，H は平面 α 上で点 A を中心とする半径 1 の円の外部にある．よって，$\text{AH}=\dfrac{\sqrt{89}}{3}$ であることより，求める点 Q は AH を $1:\left(1+\dfrac{\sqrt{89}}{3}\right)$ に外分する点となる．

ゆえに求める比は

$$\textbf{AQ：QH＝3：}(\boldsymbol{3+\sqrt{89}})$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　空間での垂線の足

24　O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B$(-1, \sqrt{5}, 1)$, C$(0, 0, \sqrt{6})$として，3点O，A，Bを通る平面をαとする．α上の点Oを中心とし半径2の円周上の点をPとして，点Cからαへ下ろした垂線の足をHとするとき，PHの長さの最小値を求めよ．

【選択肢】

㋐　1　　㋑　2　　㋒　3

【答】　㋐

【解答】

Hは平面α上の点より，実数sとtを用いて

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

と表せる．ここでCH⊥αより$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$かつ$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$であるが

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}\\&=(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}\\&=s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となり，

$$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 0),\ \overrightarrow{OB}=(-1,\ \sqrt{5},\ 1),\ \overrightarrow{OC}=(0,\ 0,\ \sqrt{6})$$

より

$$|\overrightarrow{OA}|=2,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$$

となるので，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=4s-2t=0$ゆえに$t=2s$

また，同様に

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

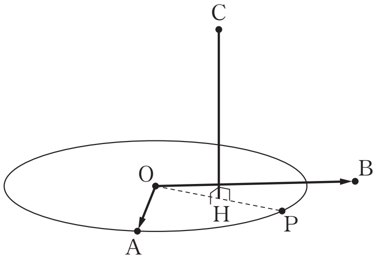
となり，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2,\ |\overrightarrow{OB}|=\sqrt{7},\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\sqrt{6}$$

となるので，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=-2s+7t-\sqrt{6}=0$

以上より$s=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$，$t=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　よってH$\left(0,\ \dfrac{\sqrt{30}}{6},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

このときOH=1でOP=2より，$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OH}$のときPHは最小値2−1=**1**をとる．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。